数理解析研究所講究録
168巻 1972年 114-124

擬微分作用素とTRANSMISSION PROPERTYについて

東大 教養 内山康一

§ 楕円型の境界値問題を考える。ふつうはcompactな領域Ωとその境界$\partial\Omega$について考える。最近，多様体Mとその部分多様体Sに対する楕円型"境界値"問題が藤原[3]，[ ]において扱かわれた。それは$H^*(M)$に対するHodge分解を$H^*(M, S)$の場合に拡張するものである。余次元が1より大きい"境界"に対する楕円型の問題は，少し古くはS. L. Sobolev [ ]，比較的最近にはB. Sternin [4]の一般的結論がある。内部での方程式はproper ellipticの単独あるいは決定系を考えているので，問題は境界条件のつけ方と，境界Sに近づくときの関数の挙動に対する制限の設定，（これも境界条件といえる）がどうなされたら適切かということである。解関数のSへのtraceが常に存在するように，Sの余次元に合わせて優決定系の方程式に対して問題を作ることは，ここでは考えない。

以下では境界値問題 $(\Omega, \partial\Omega)$ と (M, S) の比較をして，(M, S) の型の問題の特殊性を説明する．Boutet de Monvel の transmission property をもつ pseudo differential ops に対する楕円型境界値問題のとり扱いが (M, S) の場合にどうなるかみるのが標題の意味であったが，結果的には内容とずれたかもしれない．

§ transmission property をもつということの意味をきめておく．そのために Boutet de Monvel [1][2] をかんたんにみなおしておこう．

境界値問題 (EBVP) $\begin{cases} Pu = f & \text{in } \Omega \\ Bu|_{\partial\Omega} = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$

において，(P, B) は，はじめ Diff. Ops とする．楕円型の特長は，$f \in C^\infty(\bar\Omega) = \{\tilde f|_\Omega \,;\, \tilde f \in C^\infty(V),\ V$ は Ω を open set として含む manifold$\}$，$\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ であって，(P, B) が Lopatinskii-Shapiro 条件をみたせば解 $u \in C^\infty(\Omega)$ のみならず $u \in C^\infty(\bar\Omega)$ になることである．さて，(EBVP) を解くときにあらわれる Green 作用素，Poisson 作用素はそれぞれ $C^\infty(\bar\Omega) \to C^\infty(\bar\Omega)$，$C^\infty(\partial\Omega) \to C^\infty(\bar\Omega)$ へ作用する．これらを pseudo diff op (ΨDO) の symbol calculus で扱いたい．次のように考える．

manifold $\mathcal{V} \supset \bar{\Omega} \supset \partial\Omega$ を固定する．たとえばΩの 'double' をとればよい．$C^\infty(\bar{\Omega}) \ni f$ を0で延長して$\mathcal{V}$上の函数と思い $\tilde{f}$ とかく．Diff Op Pを elliptic のまま$\mathcal{V}$上に延長しておく．それを $\tilde{P}$ とする．

$$\tilde{P}\tilde{f}|_\Omega = Pf \quad \text{in } \Omega.$$

$\tilde{P}$ の parametrix を $\mathcal{V}$ （$\partial\mathcal{V} = \phi$）で考えることは容易である．一般に Q を$\mathcal{V}$上の ΨDOp としたとき，$C^\infty(\bar{\Omega})$ 上に Q_Ω を次のように定義する。

$$Q_\Omega f = Q\tilde{f}|_\Omega .$$

これは一般には $C^\infty(\bar{\Omega})$ ではない。Q の pseudo local prop. から $C^\infty(\Omega)$ ではある。

定義．ΨDOp Q は，$Q_\Omega \overset{\forall}{f} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ のとき transmission property を（$\partial\Omega$に沿って）もつという．

注意として，Green作用素の例を考えるならば，Q が elliptic Diff Op の parametrix なら（TP）をもつ．従ってもちろん Diff Op の枠より広い．かつ，ΨDO 全体にならないことは後の証明でわかる．

ついでに（TP）をもつ Ops の性質等を列挙しておく．

- P, Qが（TP）をもつならば $P \cdot Q$ もそうである．（合成をするとき properly supported を仮定）．

◦ $\partial\Omega$ に measure をもつ $\delta_{\partial\Omega} \in \mathcal{D}'(V)$ と $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$ により,

$$K_P(\varphi) = P(\varphi \otimes \delta_{\partial\Omega})|_{\Omega} \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

が (TP) をもつ ΨDOp P に定義できる。(Poisson op.)

◦ $\partial\Omega$ 上の ΨDOp B と (TP) をもつ P により

$$Tf = B(P_\Omega f|_{\partial\Omega}) \in C^\infty(\partial\Omega)$$

が定義される. (trace operator).

◦ P_1, P_2 が (TP) をもつとき, $(P_1 \cdot P_2)_\Omega - P_{1\Omega} \cdot P_{2\Omega}$ は 0 でない. これは上の Poisson op と trace op. の合成 $K \circ T : C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\overline{\Omega})$ で近似されるもので singular Green op とよばれている [ ]. 逆の $T \cdot K$ は $\partial\Omega$ 上の ΨDOp になる. ゆえに, $C^\infty(\overline{\Omega}) \oplus C^\infty(\partial\Omega) \longrightarrow C^\infty(\overline{\Omega}) \oplus C^\infty(\partial\Omega)$

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(\overline{\Omega}) \arrow[r, "\Psi\mathrm{DOp.}\ (\mathrm{TP})", "\mathrm{sing.\ Green}"'] \arrow[dr, "\mathrm{trace\ op}"] & C^\infty(\overline{\Omega}) \\
\oplus & \oplus \\
C^\infty(\partial\Omega) \arrow[r, "\Psi\mathrm{DOp}"] \arrow[ur, "\mathrm{Poisson\ op}"] & C^\infty(\partial\Omega)
\end{tikzcd}$$

として $\begin{pmatrix} P+G, & K \\ T, & B \end{pmatrix}$ という matrix 型の作用素が考えられ, "elliptic algebra" を構成できる. 詳しくは [1][2].

以上は boundary $\partial\Omega$ 付近の local なところが肝心だから, local に考え $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^{n-1})$ とする. さらに, $\mathbb{R}^{n-1}$ 方向に Fourier 変換したと思って, 1次元で (TP) をもつ ΨDOp

はどんなものかスケッチしておく。

$P(x,D)$ を R^n 上の ΨDO_p. R^{n-1} にそって (TP) をもつとする. かんたんのため, いわゆる classical ΨDO_p とし, properly supported とする。 $f\in C^\infty(\overline{R^n_+})$ のとき, $P(x,D)f$ の $x_n\to+0$ の挙動を精密にみる必要がある. しかし粗く, $f(x)=\delta(x_n)$ としてふるまいをみよう.

$$(*)=\int p(\dot{x},\xi',\xi_n)\hat{f}(\xi_n)e^{it\xi_n}d\xi_n \qquad \hat{f}=1$$

の計算。まず,

$$\begin{aligned} p(x,\xi',\xi_n) &\sim \sum p_k(x,\xi',\xi_n) \quad \text{near } (0,\xi_n) \\ &\sim \sum p_k^{(\gamma)}(x,0,\pm1)\xi'^{\gamma}|\xi_n|^{d_k-|\gamma|} \end{aligned}$$

ここで d_k は p_k の degree. 二行目は ξ' についてのTaylor展開である。

$$\begin{aligned} (*) \sim\ & \sum\{p_k^{(\gamma)}(\dot{x},0,1)\xi'^{\gamma}\chi_{-d_k+|\gamma|-1}(t) \\ & + p_k^{(\gamma)}(\dot{x},0,-1)\xi'^{\gamma}\chi_{-d_k+|\gamma|-1}(-t) \\ =\ & \sum\{p_k^{(\gamma)}(\dot{x},0,1)-(-1)^{-d_k+|\gamma|}(\dot{x},0,-1)\} \\ & \times\xi'^{\gamma}\chi_{-d_k+|\gamma|+1}(t). \end{aligned}$$

~~[illegible]~~, $\chi_{-d_k+|\gamma|-1}$ は $(\xi_n)_+^{d_k-|\gamma|}$ の逆Fourier変換である. それは t について $t\to0$ のとき C^∞ 級でない. 従ってその係数は全て消滅しなければならない.

定理. (TP) をもつ ΨDO_p の symbol は,

$$p_K^{(\gamma)}(x,\ 0,\ 1) = (-1)^{d_K-|\gamma|}\, p_K^{(\gamma)}(x,\ 0,\ -1) \quad \text{for } {}^\forall\gamma.$$

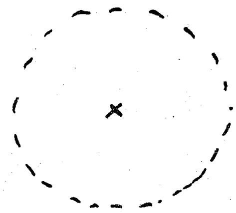
この逆も成り立つ。

注意. したがって Hilbert 変換 H は $\sigma(H)(\xi) = c\ \mathrm{sgn}\,\xi$ だから (TP) をもたない.

§ 次に (M, S) 型の問題を考える。S の近傍がとくに問題であるから, Euclid空間の領域で適当に考えることにする。

例1. $\mathbb{R}^3$ の領域 $D=\{x \mid 0<|x|<1\}$ において,

$$\begin{cases} \Delta\Delta u = 0 \\ u|_{r=1} = u_r|_{r=1} = 0 \\ u|_{r=0} = 1 \end{cases}$$



この解を Sobolev空間 H^2 でもとめると,

$$u = (1-r)^2. \qquad (r=|x|).$$

$S=\{0\}$ の境界条件は 1 つであり, u は $r=0$ において滑らかさを失う.

例2. 例1を $(\Omega, \partial\Omega)$ 型の問題で近似できないことを意味すると思われる。

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon<|x|<1\} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} D$$

$$\partial\Omega_\varepsilon = \{x \mid |x|=\varepsilon\} \cup \{x \mid |x|=1\} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \partial D$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, \quad u_r|_{r=1} = u|_{r=1} = 0, \\ \underline{u_r|_{\varepsilon=r} = \theta}\ (\text{定数}), \quad u|_{r=\varepsilon} = 1. \end{cases}$$

とおいて，radial solutionを求める。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{4}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3} + (\cdots)\Lambda(\cdots)$$ だから，

$$\begin{cases} u^{(4)} + \frac{4}{r}u^{(3)} = 0 \\ u'(1) = u(1) = 0 \\ u'(\varepsilon) = \theta, \quad u(\varepsilon) = 1 \end{cases}$$ を計算する．

$$u(r) = \frac{a(\varepsilon,\theta)}{r} + b(\varepsilon,\theta)r^2 + c(\varepsilon,\theta)r + d(\varepsilon,\theta).$$

$$a(\varepsilon,\theta) \sim -\theta(1-\varepsilon)^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon) \longrightarrow 0$$

$$b(\varepsilon,\theta) \sim 1 + \varepsilon\theta - 2\varepsilon^2\theta + O(\varepsilon) \longrightarrow 1$$

$$c(\varepsilon,\theta) \sim -2 - \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)\theta + 4\varepsilon^2\theta - 2\varepsilon\theta + O(\varepsilon) \longrightarrow -2$$

$$d \longrightarrow 1.$$

故に，$u_{\varepsilon,\theta} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} u(r) = r^2 - 2r + 1 = (1-r)^2$

これは θ に依らない．

例3. $\mathbb{R}^3$ で $\Delta\Delta$ を扱うのは原点で traceをだすためである。 Δ で領域を例2にしてみるとどうか．

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \varepsilon < |x| < 1 \\ u|_{r=1} = 0 \\ u|_{r=\varepsilon} = 1. \end{cases} ; \quad \begin{cases} u'' + \frac{2}{r}u' = 0 \\ u(1) = 0 \\ u(\varepsilon) = 1 \end{cases}$$

$$u(r) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad (\text{各点ごと})$$

これらの例から，$(\Omega, \partial\Omega)$ 型の問題の limit としてはとらえにくいと思われる．そこで $A(D)$ を定係数楕円型作用素として，その主部（m階）を $A_m(D)$ とするとき，$A_m(D)u=0$，$x \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ の原点付近のふるまいをみることにする．

◎ $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ を仮定する．

ある微分作用素 $Q(D)$ が存在して，

$$A_m(D)u = Q(D)\delta \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

$A_m(D)E = \delta$ とするならば，$u = Q(D)E + U$ 　（$A_m(D)U=0$）.

したがって特異性は elementary solution の微分 $Q(D)E$ につきる．それはよく知られているように r についていえば，

$O(r^{-p})$ あるいは，$O(r^{p}\log r)$ である．

命題．$p(x,D)$ を $\mathbb{R}^n$ の classical ΨDO_p とする．（C^∞係数）

(1) $p(x,D)\delta \in \mathcal{S}'$ かつ $\operatorname{sing\,supp} p(x,D)\delta = \{0\}$.

(2) $p(x,D)\delta \sim f_0(\omega)r^{-m-n} + f_1(\omega)r^{-m-n+1} + \cdots$

i.e.

$$\left[p(x,D)\delta - \sum_{j=0}^{N-1} f_j(\omega)\Phi_{j-n}(r)\right] = \underset{|x|\to 0}{O}(\Phi_{N-n})$$

ただし，$\Phi_{j-n}(r)$ は const $\times\, r^{m_j}$ の逆Fourier変換．で m_j は $p(x,D)$ の漸近展開の項の次数．

がわかる．

補題．$a(\omega)$ は S^{n-1} 上の C^∞ 関数，$x' = x/|x|$ とする．

このとき

$$\int_{S^{n-1}} \frac{a(\omega)\, d\omega}{(x'\omega + i0)^{n+j}}, \quad \int_{S^{n-1}} a(\omega) \log|x'\omega|\, d\omega$$

$$\int_{S^{n-1}} a(\omega)(x'\omega)^j \log|x'\omega|\, d\omega, \quad \int_{S^{n-1}} a(\omega)\, Y(x\omega)\, d\omega$$

$$\int_{S^{n-1}} a(\xi')\,\delta^{(j)}(x\xi')\, d\xi'$$

はすべて 0次同次の $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$ 関数である．

命題の証明は省略する．r および $\log r$ の $\frac{\partial}{\partial x_i}$ の逐次微分を考えることにより，$A(D)u = 0$ $x \neq 0$ の特異性は

奇数次元のとき

(イ) $u(x) \sim a_{-p}(\omega) r^{-p} + \cdots\cdots + a_{-1}(\omega) r^{-1} + a_0(\omega) + a_1(\omega) r + \cdots + O(r^q)$

偶数次元のとき，

(ロ) $u(x) \sim a_{-p}(\omega) r^{-p} + b_{-p}(\omega) r^{-p} \log r + \cdots + a_q r^q \log r + b_q r^q + O(r^{q+1})$．

従って，$(\Omega, \partial\Omega)$ のときの $C^\infty(\overline{\Omega})$ に相当する関数空間は考えられない．それゆえ "transmission property" を翻訳することも無理かもしれないが次のことは考えられる．

原点での特異性が $\log r$ を含まず r の巾にかぎられている (イ)の右辺のような関数は微分作用素に対して閉じている。では ΨDO について閉じているか？

つまり，　$p(x,D)$　m次 ΨDO．楕円型．

$$f(x) \sim a(\omega) r^{-p} + O(r^{-p+1}) \qquad p \in \mathbb{Z}$$

$$p(x,D)u = f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) \sim b(\omega) r^{-q} + O(r^{-q+1}) \quad ?$$

空間次元が奇数ならば成立することが予想される．ただし，

$p_j(x, -\xi) = (-1)^{m_j} p_j(x, \xi)$　を仮定する．

Sternin [ ] に，Sobolev space の枠の下で A priori 評価と index が有限になるような境界条件が述べられている．

上述のことからすぐわかることを注意しておく．

$p(x, D)$　m階 楕円型とする．

$p(x, D) u = 0 \qquad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$

ならば，$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ の中で最も特異性の弱いのは，$O(r^{m-n})$．

C^∞-modulo で考えると，Null space の次元は特異性を $O(r^k)$ と指定すると

$$k > m-n \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ C^\infty)$$

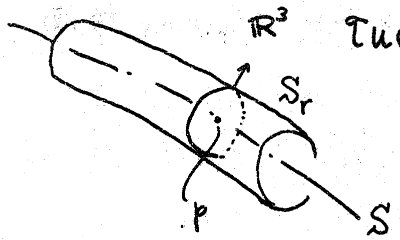
$$k \leq m-n \quad \Rightarrow \quad \dim \{ Q(D) ;\ \deg Q(D) \leq m-n-k \text{ の微分作用素} \} = l(m-n-k)$$

$$l(0) = 1, \qquad l(1) = n+1, \quad l(2) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

ゆえに，① $l(m-n-k)$ 次元の自由度をなくすだけの条件が要る．

② 境界条件を $B(x.D)u|_S$ の形にすると, trace をとる必要があり, $Bu = o(1)$ $r \to 0$ より悪い挙動をすると trace がとれない。 $m-n \gg k > \frac{m-n}{2} > 0$ が要求される。 $(\Omega, \partial\Omega)$ の Lopatinskii 条件に対応するものは求まる。

③ 境界条件を ΨDO（積分作用素）にすれば, S における特異性を滑らかにして trace をとることができる。しかしこれは local op. でない。境界作用素として



$$\tau u(p) = \lim_{r \to 0} \int_{S_r(p)} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS_r(p)$$

の如きがどれ位使えるかは検討中である。

文献

[1] Boutet de Monvel ; Comportement d'un opérateur pseudo differentiel sur une variété à bord J. Anal. Math. 17 (1966)

[2] —— ; Boundary problems for pseudo-differential operators Acta Math. (197) 11−51

[3] Fujiwara, D ; a relative Hodge decomposition

[4] Sternin, B. Elliptic and parabolic problems on manifolds with a boundary consisting of components of various dimensions (はんやく) Soviet Math. Dokl. 8 (1967) 41−45.